

Dạng 2: Xác định giao tuyến và thiết diện của hình chóp

Phương pháp xác định giao tuyến: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp “Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng”, ta còn có thể tìm bằng cách sau:

- **Bước 1:** Chỉ ra rằng mặt phẳng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b .
- **Bước 2:** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- **Bước 3:** Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx // a // b$.

Phương pháp xác định thiết diện:

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

- Tìm một điểm chung S của hai mặt phẳng (α) và (β) .
- Hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng d_1, d_2 mà $d_1 // d_2$.

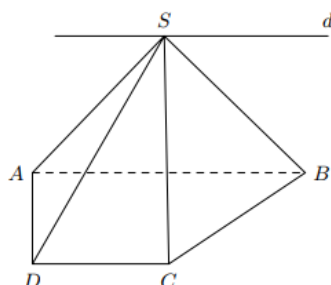
Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Sx song song với d_1, d_2 .

b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình (H) ta tìm giao điểm của các cạnh của hình (H) với mặt phẳng (α) . Đa giác tạo bởi các giao điểm tìm được chính là thiết diện cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

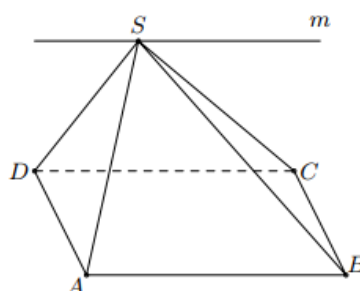
Lời giải



Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng AB và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

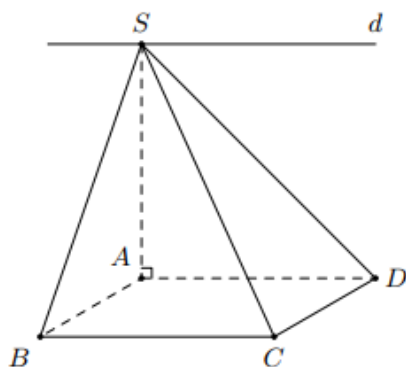
Lời giải



Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song là AB và CD . Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng m đi qua S và song song với AB, CD .

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải



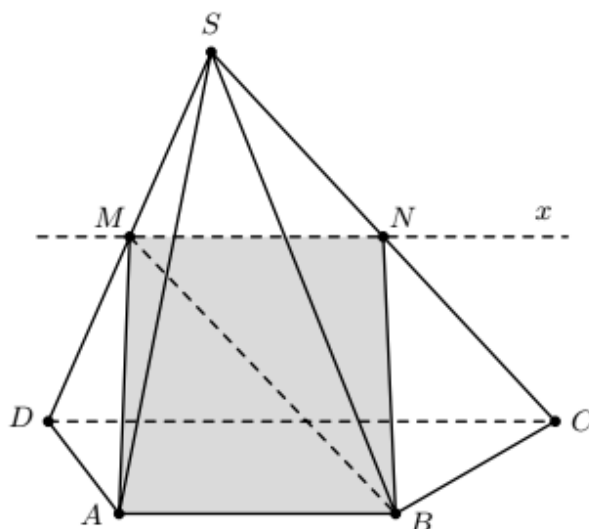
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD , suy ra theo hệ quả của định lý 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

Ta đã biết trong cùng một mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) .
- Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) . Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Lời giải



a) Ta có $M \in SD \subset (SCD)$ và $M \in (MAB) \Rightarrow M \in (SCD) \cap (MAB)$ và ta có
$$\begin{cases} CD \subset (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD // AB \end{cases}$$

Vậy $(MAB) \cap (SCD) = Mx // AB // CD$.

b) Theo đề bài, ta có N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) .

Suy ra $N \in (MAB)$ và $N \in SC \subset (SCD)$ mà $(MAB) \cap (SCD) = Mx // AB // CD$.

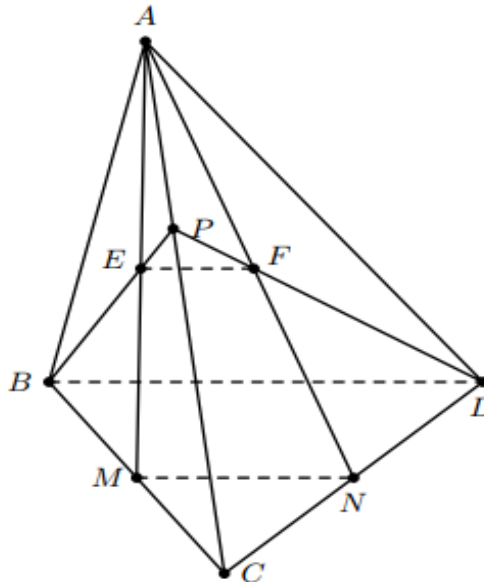
Suy ra $N \in Mx$ hay $MN // AB // CD$.

Xét tam giác (SDC) ta có
$$\begin{cases} MS = MD \\ MN // CD \end{cases} \Rightarrow NS = NC$$
.

Vậy MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD .

Lời giải



Trong (AMN) gọi $E = AM \cap BP$. Khi đó
$$\begin{cases} E \in BP \subset (BPD) \\ E \in AM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BPD) \quad (1).$$

Trong (ACD) gọi $F = AN \cap PD$. Khi đó
$$\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in PD \subset (BPD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BPD) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BPD) = EF$.

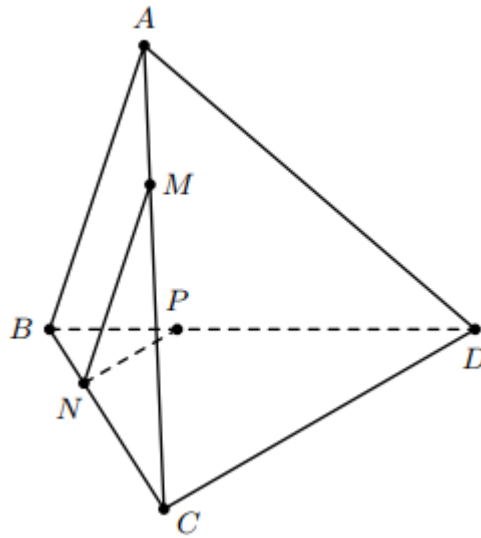
Xét tam giác BCD , có M, N lần lượt là trung điểm của BC và $CD \Rightarrow MN // BD$

Mặt khác: $BD \subset (BDP); MN \subset (AMN)$ và $(BDP) \cap (AMN) = EF$

Vậy $MN // EF // BD$.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc cạnh AC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD . Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Mx \parallel AB.$$

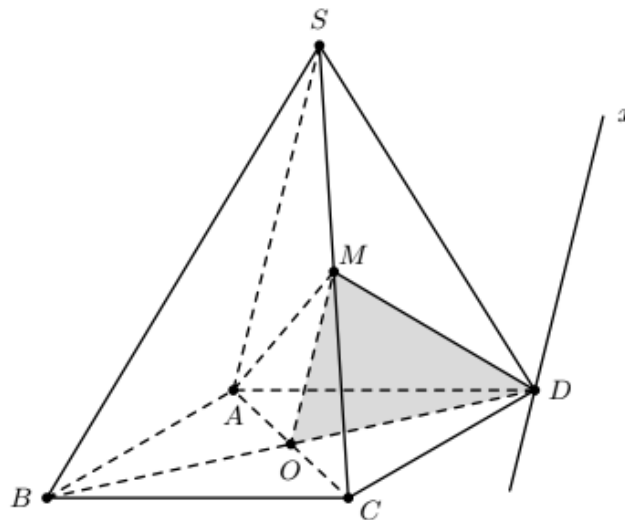
$$\text{Gọi } Mx \cap BC = N \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MN \text{ mà } \begin{cases} N \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (BCD) = Ny \parallel CD.$$

Gọi $Ny \cap BD = P$. Vậy $(P) \cap (BCD) = NP$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA)
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Lời giải



- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .

Xét tam giác SAC , ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên OM là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OM \parallel SA$ mà $SA \subset (SAD)$ và $SA \subset (SBA)$.

Vậy $OM \parallel (SAD)$ và $OM \parallel (SBA)$.

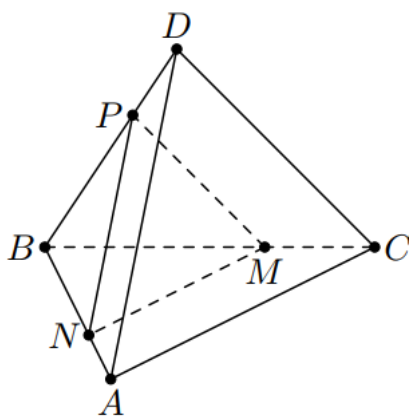
b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Ta có $SA \subset (SAD)$ và $OM \subset (OMD)$ mà $SA \parallel OM$ và $D \in (SAD) \cap (OMD)$.

Vậy $(SAD) \cap (OMD) = Dx \parallel SA \parallel OM$.

Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M tùy ý trên cạnh BC . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh AD , AC . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) .

Lời giải



Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ACB) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (ABC) là đường thẳng đi qua M , song song với AC , cắt AB tại N .

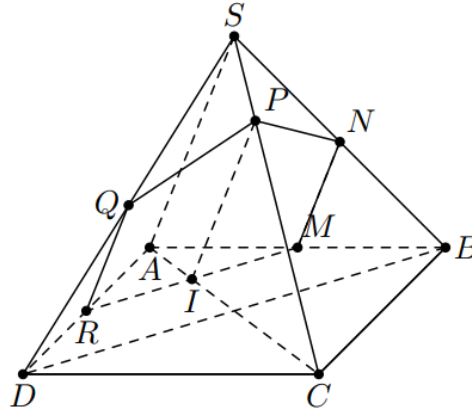
Tương tự, giao tuyến của (α) và (ABD) là đường thẳng đi qua N , song song với AD , cắt BD tại P .

Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (ACB) = MN \\ (\alpha) \cap (ABD) = NP \\ (\alpha) \cap (ABD) = PM \end{cases}$ nên thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MNP .

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M là trung điểm cạnh AB . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh BD , SA . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) .

Lời giải

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (SAC) là đường thẳng đi qua M , song song với SA , cắt SB tại N .



Lại có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng đi

qua M , song song với BD , cắt BD và AC tại R và I .

Tương tự, giao tuyến của (α) và (SAD) là đường thẳng đi qua R , song song với SA , cắt SD tại Q .

Mặt khác $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (SAC) là đường thẳng đi

qua I , song song với SA , cắt SC tại P .

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = MN \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \\ (\alpha) \cap (SCD) = PQ \\ (\alpha) \cap (SAD) = QR \\ (\alpha) \cap (ABCD) = RM \end{cases}$ nên thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là ngũ giác $MNPQR$.

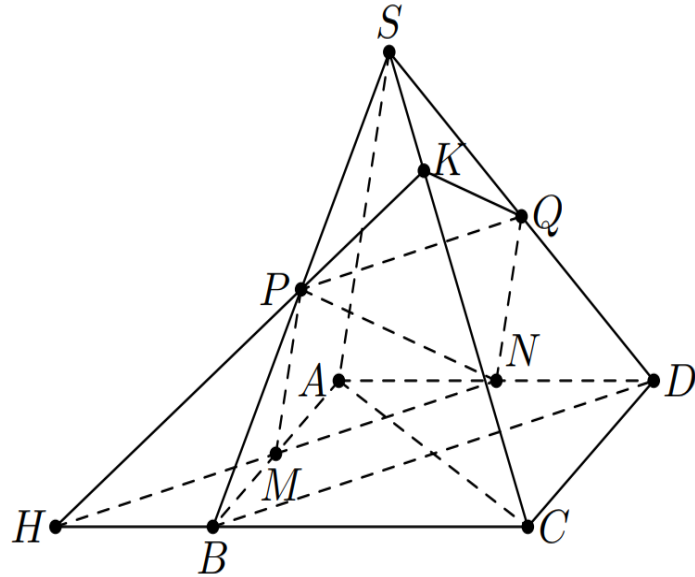
Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh AB , AD , SB .

- Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.
- Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải

- Tam giác ABD có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \parallel MN \\ BD \not\subset (MNP) \Rightarrow BD \parallel (MNP) \\ MN \subset (MNP) \end{cases}$



b) Trong $(ABCD)$ dựng $H = MN \cap BC$ ta có $\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = BC \cap (MNP)$

c) Ta có $\begin{cases} P \in SB, SB \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD) \\ P \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (SBD) \cap (MNP)$.

Mặt khác $\begin{cases} P \in (SBD) \cap (MNP) \\ MN \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và (MNP) là đường

thẳng đi qua P , song song với BD , cắt SD tại Q . Vậy $(SBD) \cap (MNP) = PQ$.

d) Trong (SBC) dựng $K = HP \cap SC$, giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) lần lượt là MN , PM , PK , KQ , QN .

Vậy thiết diện của hình chóp với (MNP) là ngũ giác $PMNQK$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

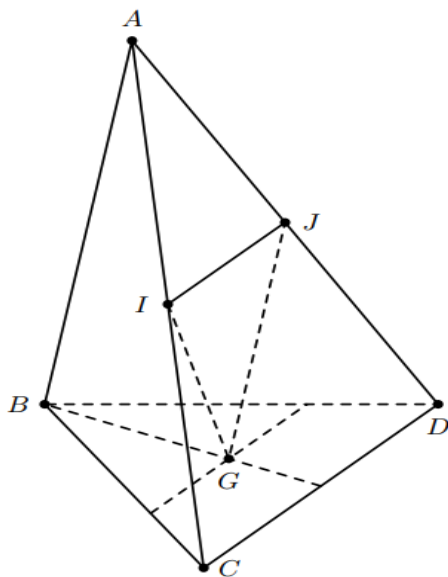
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. I và J theo thứ tự là trung điểm của AD , G là trọng tâm tam giác BCD .

Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

- A.** Qua I và song song với AB . **B.** Qua J và song song với BD .
C. Qua G và song song với CD . **D.** Qua G và song song với BC .

Lời giải



Gọi d là giao tuyến của (GIJ) và (BCD) . Khi đó ta có
$$\begin{cases} G \in (GIJ) \cap (BCD) \\ IJ // CD \\ IJ \subset (GIJ) \end{cases}$$

Suy ra d đi qua G và song song với CD .

Câu 2: Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b , sao cho $a // b$. Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là

- A.** Đường thẳng c song song với a và b .
B. Đường thẳng c song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng a và b .
C. Đường thẳng c trùng với một trong hai đường thẳng a và b .
D. Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b .

Lời giải

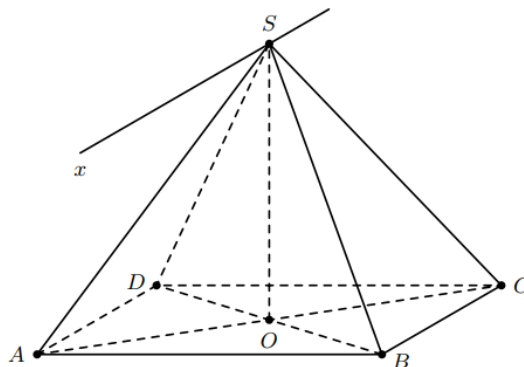
Đường thẳng c song song với a và b .

Câu 3: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

- A.** Đường thẳng qua S và song song với AB .

- B.** Đường thẳng SO .
C. Đường thẳng qua S và song song với AD .
D. Không có giao tuyến.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \quad . \text{ Vậy } (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC .$$

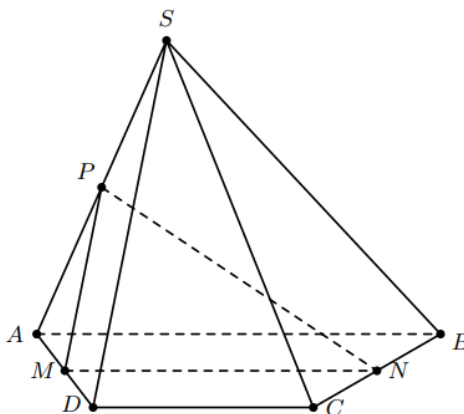
- Câu 4:** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD . Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?
A. (PCD) . **B.** (ABC) . **C.** (BCD) . **D.** (BCD) .

Lời giải

Theo đề bài, ta có MN là đường trung bình của tam giác AB nên MN song song với BC , MN không nằm trong (BCD) nên đường thẳng MN song song với (BCD) .

- Câu 5:** Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AD, SA . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP) .
A. Đường thẳng qua P và song song với AB .
B. Đường thẳng qua S và song song với AB .
C. Đường thẳng qua M và song song với SC .
D. Đường thẳng qua PM .

Lời giải

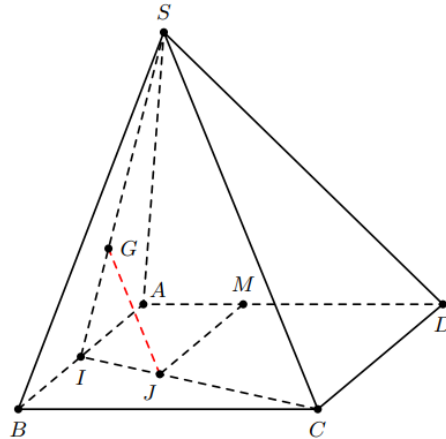


Ta có $\begin{cases} P \in SA \subset (SAB) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (SAD) \cap (SBC)$. Mà $MN // AB$ nên giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng qua P và song song với AB .

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB . Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J , đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

- A. (SCD) . **B. (SAD) .** C. (SBC) . D. (SAC) .

Lời giải



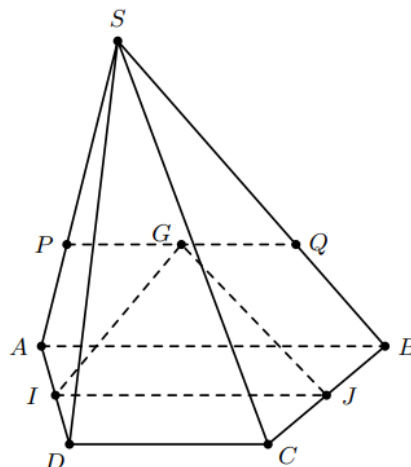
Ta có $AI // CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3}$ mà $\frac{GI}{SI} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{GI}{SI} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ // SC$.

Hơn nữa, $SC \subset (SCD), (SBC), (SAC)$ nên $JG // (SCD), (SBC), (SAC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Cho G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- A. SC . **B. Đường thẳng qua S và song song với AB .**
C. Đường thẳng qua G và song song với DC . D. Đường thẳng qua G và cắt BC .

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$, ta có I là trung điểm của AD và J là trung điểm của BC

Suy ra IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IJ // AB // CD$

$$\text{Ta có: } G \in (SAB) \cap (IJG). \text{ Hơn nữa } \begin{cases} AB \subset (SAB) \\ IJ \subset (IJG) \\ AB // IJ \end{cases}$$

Vậy $(SAB) \cap (IJG) = G // AB // IJ$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm AC, BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng

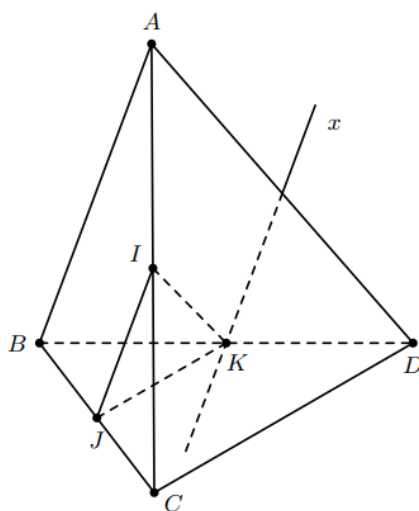
A. KD .

B. Qua K và song song AB .

C. KI .

D. Qua I và song song với JK .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in BD \subset (ABD) \\ K \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABD) \cap (IJK)$$

$$\text{Xét tam giác } \triangle CAB, \text{ ta có } \begin{cases} I \text{ là trung điểm của } AC \\ J \text{ là trung điểm của } BC \end{cases}$$

Suy ra IJ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow IJ // AB$ mà $IJ \subset (IJK)$ và $AB \subset (ABD)$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng đi qua điểm K và song song với AB .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi I là trung điểm cạnh SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

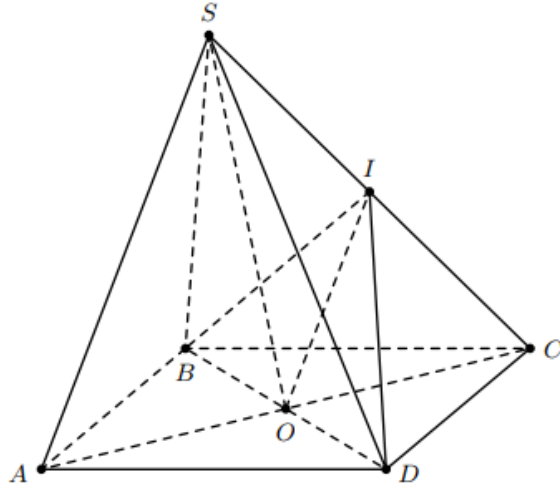
A. Đường thẳng IO song song với mp(SAD).

B. Đường thẳng IO song song với mp(SAB).

C. Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến OI .

D. Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến OI .

Lời giải



Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC , I là trung điểm SC nên $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$ và (SAD) .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến BD .

Câu 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

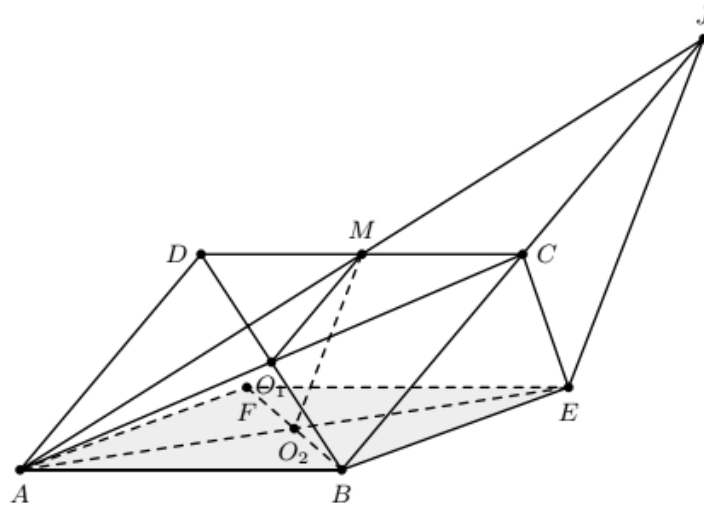
A. MO_2 cắt (BEC) .

B. O_1O_2 song song với (BEC) .

C. O_1O_2 song song với (EFM) .

D. O_1O_2 song song với (AFD) .

Lời giải



Gọi J là giao điểm của AM và BC . Ta có: $MO_1 \parallel AD \parallel BC \Rightarrow MO_1 \parallel CJ$.

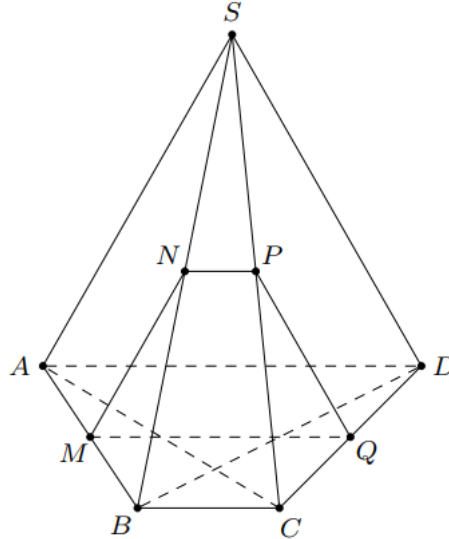
Mà O_1 là trung điểm của AC nên M là trung điểm của AJ do đó $MO_2 \parallel EJ$.

Từ đó suy ra $MO_2 \parallel (BEC)$ (vì dễ nhận thấy MO_2 không nằm trên (BEC)).

Vậy MO_2 không cắt (BEC) .

- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi M là trung điểm cạnh AB . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và BC . Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì
- A. Ngũ giác. B. Hình bình hành. C. Tam giác. D. Hình thang.

Lời giải



Gọi N là giao điểm của SB và (P) , suy ra $MN \parallel SA \Rightarrow N$ là trung điểm của SB .

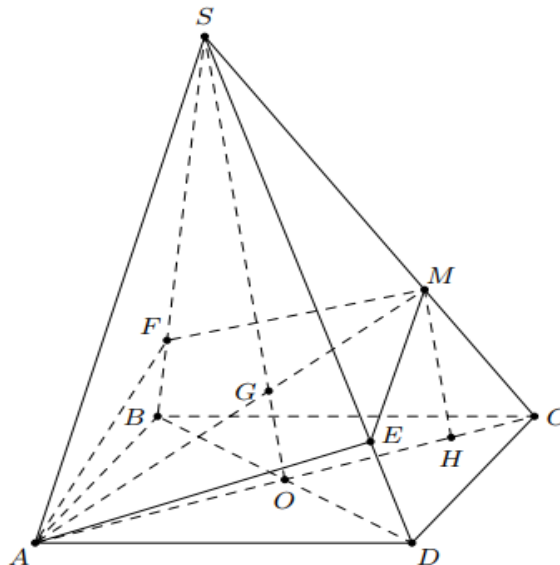
Gọi P, Q là giao điểm của SC, SD và (P) , tương tự ta có được P, Q là trung điểm của SC, SD

Suy ra $NP \parallel MQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

- Câu 12:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) .

- A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. C. $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap AM$, trong mặt phẳng (SBD) kẻ đường thẳng d đi qua G và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E và F . Ta có thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AEMF$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} &\Rightarrow BD \perp (SAC) \\ &\Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AM. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kẻ } MH \perp SO, (H \in AC). \text{ Ta có } \frac{CH}{CO} = \frac{CM}{CS} = \frac{1}{3} &\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OG}{MH} = \frac{AO}{AH} = \frac{3}{5}. \\ \Rightarrow OG = \frac{3}{5}MH = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}SO = \frac{1}{5}SO. \text{ Suy ra } \frac{EF}{BD} = \frac{SG}{SO} = \frac{4}{5} &\Rightarrow EF = \frac{4}{5}BD = \frac{4\sqrt{2}a}{5}. \end{aligned}$$

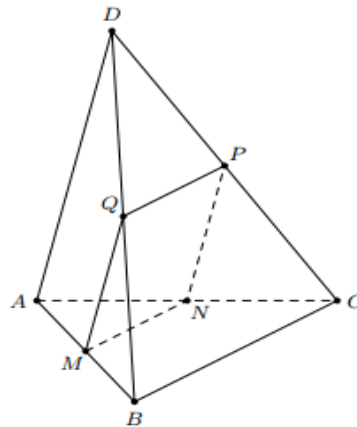
$$\text{Dễ thấy tam giác } SAC \text{ vuông cân tại } S \text{ nên } AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}a}{5} = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}.$$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD , thiết diện thu được là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Ngũ giác.

Lời giải



Gọi (α) mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD . Giả sử N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với AC, CD và BD .

Vì $(\alpha) \cap (ABC) = MN$ và $BC \parallel (\alpha) \Rightarrow MN \parallel BC$. Tương tự ta có $PQ \parallel BC$ do đó $MN \parallel PQ$.

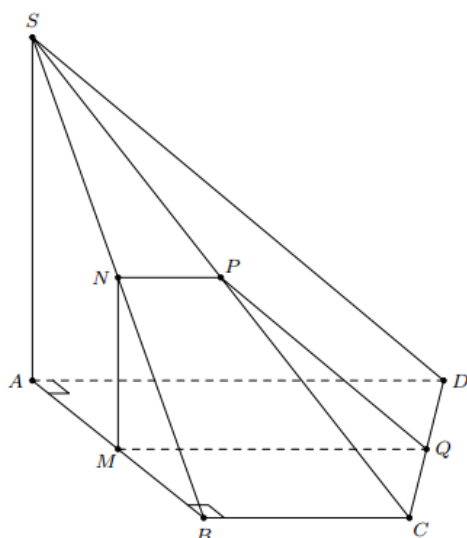
Vì $(\alpha) \cap (ACD) = NP$ và $AD \parallel (\alpha) \Rightarrow NP \parallel AD$. Tương tự ta có $QM \parallel AD$ do đó $MQ \parallel NP$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Cạnh SA vuông góc với đáy. M là một điểm nằm trên cạnh AB . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và AD . Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải



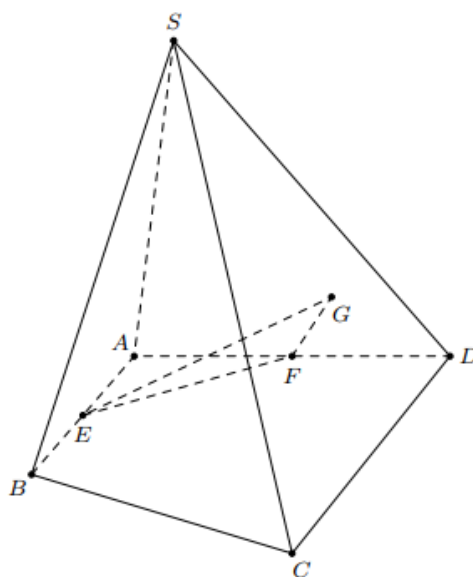
Ta có: $\begin{cases} (P) \sqsubseteq SA \\ M \in (P) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = MN, (N \in SB; MN \sqsubseteq SA).$

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) \sqcap AD \\ M \in (P) \cap (ABCD) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = MQ, (Q \in BC; MQ \sqcap AD).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) \sqcap AD \\ N \in (P) \cap ((SBC)) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NP, (P \in SC; NP \sqcap AD \sqcap BC).$$

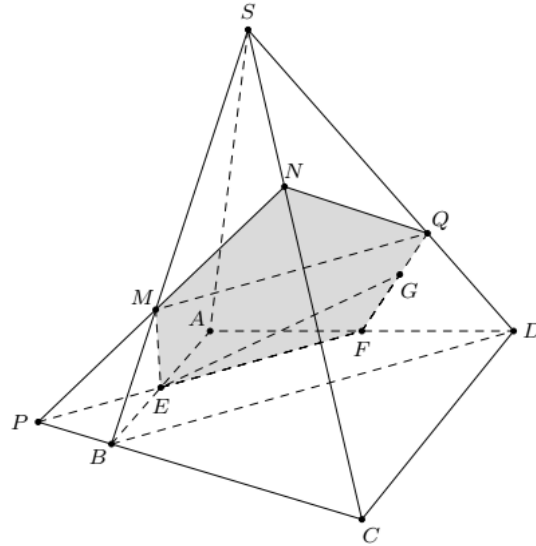
Do $SA \perp AB \Rightarrow MN \perp MQ$. Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD (tham khảo hình vẽ). Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là hình gì



- A.** Hình tam giác. **B.** Hình tứ giác. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình lục giác.

Lời giải

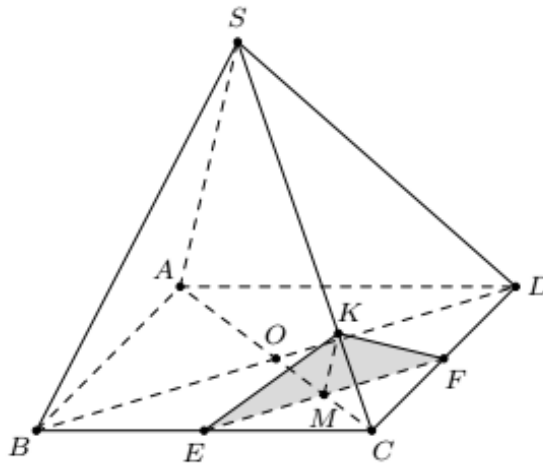


Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $EF \parallel BD$. Kéo dài EF cắt BC tại P . Gọi Q là giao điểm của FG và SD . Kẻ $QM \parallel BD (M \in SB)$. Nối PM cắt SC tại N . Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG) là ngũ giác $EMNQF$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi M là trung điểm của OC . Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và BD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) là hình gì?

- A.** Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải



Thiết diện là tam giác EFK như hình vẽ.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC và AD . Thiết diện thu được là hình gì

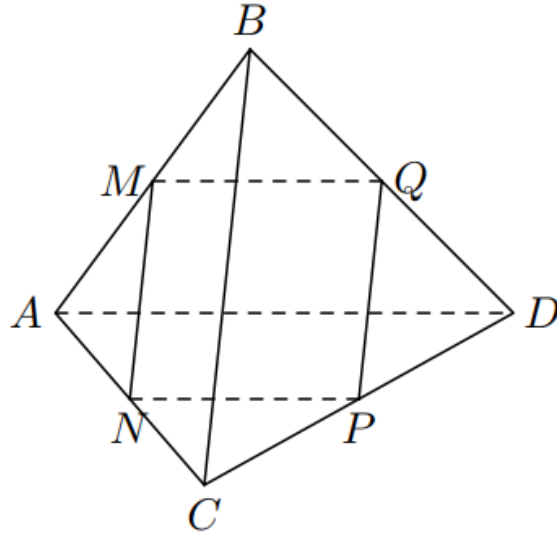
- A.** Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải

Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD và BD .

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC và AD là tứ giác $MNPQ$.

Do MN cùng song song và bằng một nửa BC . Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của SB , SD và BC . Gọi E là giao điểm của (MNP) với cạnh SA . Tính tỉ số $\frac{SE}{SA}$.

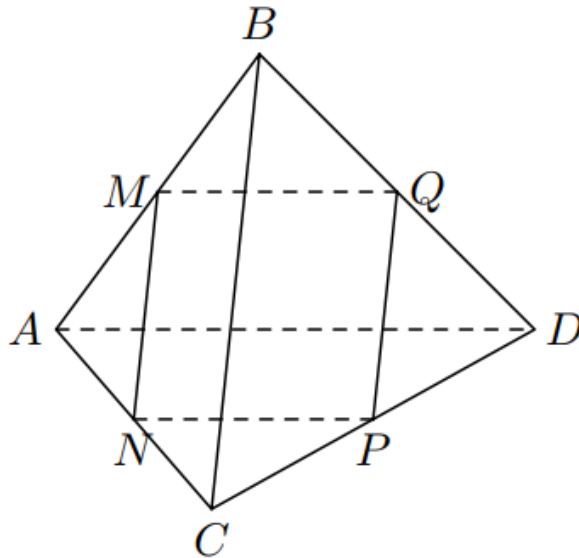
A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Mặt phẳng (MNP) song song với BD nên cắt DC tại trung điểm K của cạnh DC .

Kẻ KP cắt AC tại I , kẻ MN cắt SO tại J .

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ IJ cắt SA tại E .

$$\text{Vì } (MNP) \parallel SC \Rightarrow IJ \parallel SC \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{IC}{AC} = \frac{1}{4}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua O , song song với AB và SC là hình gì?

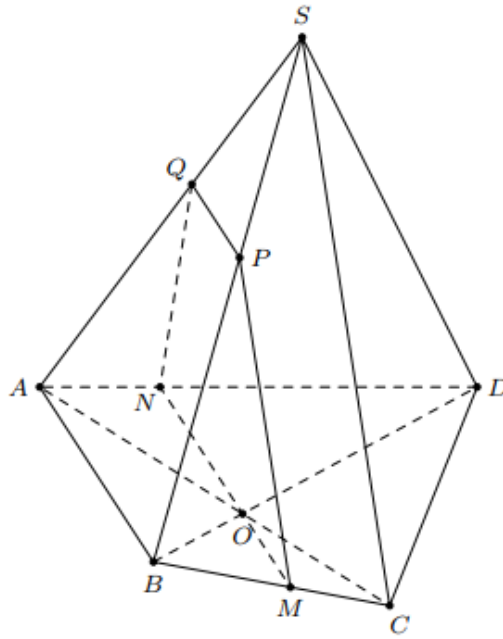
A. Hình chữ nhật.

B. Hình thang.

C. Hình bình hành.

D. Hình vuông.

Lời giải



Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC , AD lần lượt tại M , N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với SC cắt SB tại P .

Qua P kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA tại Q .

Ta được thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Vì QP , MN cùng song song với AB nên $QP \parallel MN$. Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S , $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA , AB cắt các cạnh AD , BC , SD , SB theo thứ tự tại M , N , P , Q . Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Biết x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn, bán kính đường tròn đó là

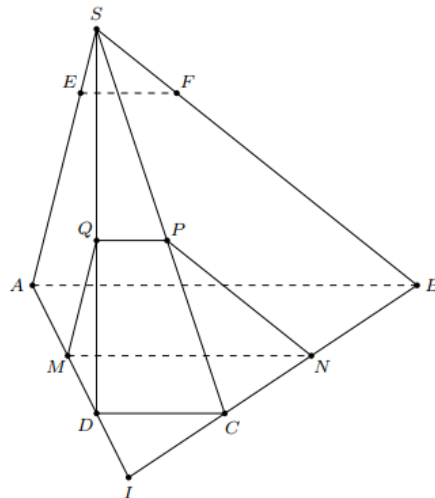
A. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. a .

Lời giải



Vì (P) song song với SA , AB cắt các cạnh AD , BC , SD , SB theo thứ tự tại M , N , P , Q nên $MN \parallel AB \parallel PQ$, $MQ \parallel SA$, $NP \parallel SB$.

Theo công thức Hê-rông, diện tích tam giác SAB là $S_{SAB} = \frac{3\sqrt{7}}{4}a^2$.

Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB , suy ra $r_1 = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{7}}{14}a$.

Gọi E, F nằm trên cạnh SA, SB sao cho $EF \parallel AB$ và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp $\triangle SAB$.

Khi đó khoảng cách giữa EF, AB là $d = 2r_1 = \frac{3\sqrt{7}}{7}a$.

Gọi h là đường cao $\triangle SAB$ ta có $h = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}a \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SA} = \frac{h-d}{h} = \frac{1}{7}$.

Ta có $\frac{AM}{AD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{QP}{DC} \Rightarrow QP = AM = x$.

Mặt khác, gọi I là giao điểm của AD và BC ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} = \frac{3a-2x}{3a} \Rightarrow MN = 3a-2x$.

Điều kiện để hình thang $MNPQ$ ngoại tiếp đường tròn là hai hình thang $MNPQ$ và $ABEF$

đồng dạng với nhau, khi đó $\frac{QP}{MN} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{x}{3a-2x} = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{a}{3}$.

Gọi r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$.

Ta có: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{MN}{AB} = \frac{3a-2x}{3a} = \frac{7}{9} \Rightarrow r_2 = \frac{a\sqrt{7}}{6}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA , điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

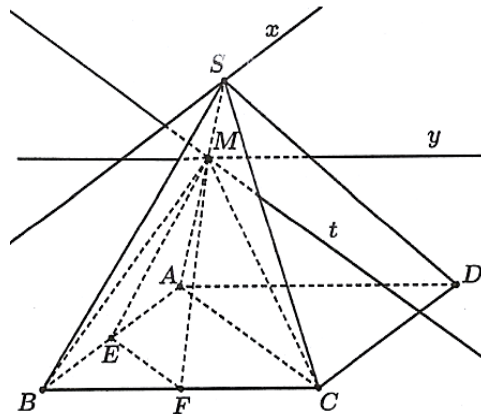
a) $EF \parallel AC$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC

Lời giải



a) Đúng: $EF \parallel AC$

b) Sai: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD). \\ AB // CD \end{cases}$$

Suy ra $S_x = (SAB) \cap (SCD)$, với S_x là đường thẳng qua S và $S_x // AB // CD$.

c) Đúng: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD).$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC); AD \subset (SAD). \\ BC // AD \end{cases}$$

Suy ra $M_y = (MBC) \cap (SAD)$, M_y là đường thẳng qua M và $M_y // BC // AD$.

d) Đúng: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) :

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC).$$

Xét tam giác ABC , ta có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF // AC$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF); AC \subset (SAC) \\ EF // AC \end{cases}$$

Suy ra $M_t = (MEF) \cap (SAC)$, M_t là đường thẳng qua M và $M_t // EF // AC$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm của tam giác BCD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

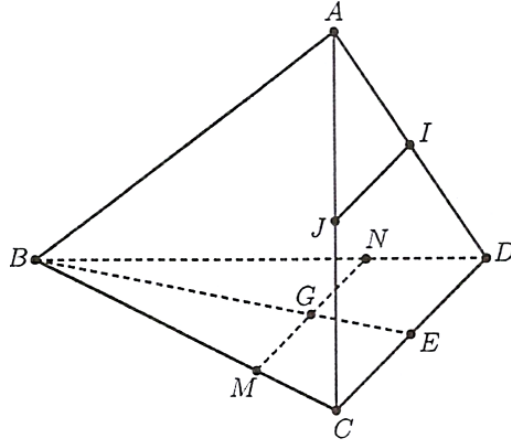
a) $IJ // CD$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với BC

c) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N . Khi đó $2IJ + 3MN = 17$.

d) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N . Khi đó $3IJ + 2MN = 18$.

Lời giải



a) Đúng: $IJ // CD$

b) Sai: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) :

Vì IJ là đường trung bình của tam giác ACD nên $IJ // CD$.

Ta có:
$$\begin{cases} G \in (GIJ) \cap (BCD) \\ IJ // CD \\ IJ \subset (GIJ), CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow Gx = (GIJ) \cap (BCD), \text{ trong đó } Gx \text{ là đường thẳng qua}$$

G và $Gx // IJ // CD$.

c) Sai: Trong mặt phẳng (BCD) , kẻ Gx song song CD cắt BC tại M , cắt BD tại N .

Gọi E là trung điểm CD , theo định lý Thalet, ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$; $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC}$

Suy ra $\frac{MN}{CD} = \frac{2}{3}$ hay $MN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}.6 = 4$.

Vì IJ là đường trung bình tam giác ACD nên $IJ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.6 = 3$.

Do đó $2IJ + 3MN = 2.3 + 3.4 = 18$.

d) Sai: $3IJ + 2MN = 3.3 + 2.4 = 17$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

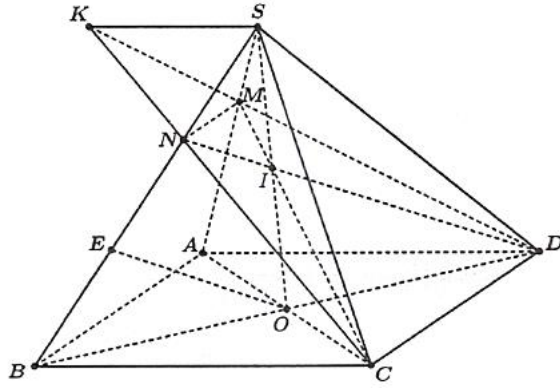
a) Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)

b) Ta có $SN = \frac{2}{3}SB$

c) Cho $AB = a$ thì $MN = \frac{a}{2}$

d) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Khi đó SK và BC chéo nhau

Lời giải



a) Đúng: Trong mặt phẳng (SAC) kẻ CI cắt SA tại M ;

Trong mặt phẳng (SBD) kẻ DI cắt SB tại N .

$$\text{Vì } \begin{cases} M \in CI, CI \subset (ICD) \\ M \in SA \end{cases} \Rightarrow M = SA \cap (ICD).$$

$$\text{b) Sai: Tương tự: } \begin{cases} N \in DI, DI \subset (ICD) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ICD).$$

Gọi E là trung điểm BN , OE là đường trung bình của tam giác $BDN \Rightarrow OE // DN$.

Trong tam giác SOE , ta có NI qua trung điểm I của SO và $NI // OE$, N là trung điểm của SE . Vậy $SN = NE = EB$ hay $SN = \frac{1}{3}SB$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $SM = \frac{1}{3}SA$.

Khi đó hai tam giác SMN, SAB đồng dạng vì có góc S chung và $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$.

$$\text{c) Sai: Xét tam giác } SAB, \text{ theo định lí Thales, ta có: } \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}.$$

d) Sai: Chứng minh $SK // BC // AD$:

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

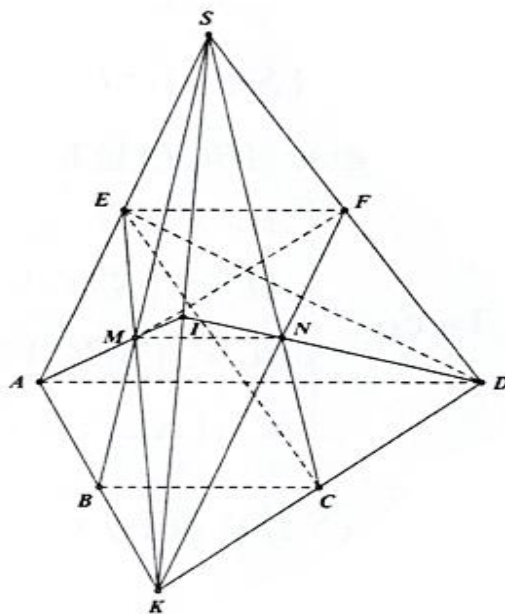
$$\text{Ta có: } \begin{cases} K \in CN, CN \subset (SBC) \\ K \in DM, DM \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD).$$

$$\text{Vì vậy } SK = (SBC) \cap (SAD). \text{ Khi đó: } \begin{cases} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \Rightarrow SK // BC // AD. \\ BC // AD \end{cases}$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD . K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE
- b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N . Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành
- c) Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm
- d) Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\triangle KMN}}{S_{\triangle KEF}} = \frac{2}{3}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có: $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong (SAB) gọi $M = KE \cap SB$ thì ta có $KE \subset (CDE)$ do đó $SB \cap (CDE) = M$.

b) Sai: Trong (SCD) gọi $N = KF \cap SC$ thì ta có $KF \subset (EFM)$ do đó $SC \cap (EFM) = N$.

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF \parallel BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel EF \parallel BC.$$

Suy ra tứ giác $EFNM$ là hình thang.

c) Đúng: $(ADNM)$ gọi $I = AM \cap DN$ mà $\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in DN, DN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD),$

Hay $I \in SK$ nên 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I .

d) Sai: Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD . Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK .

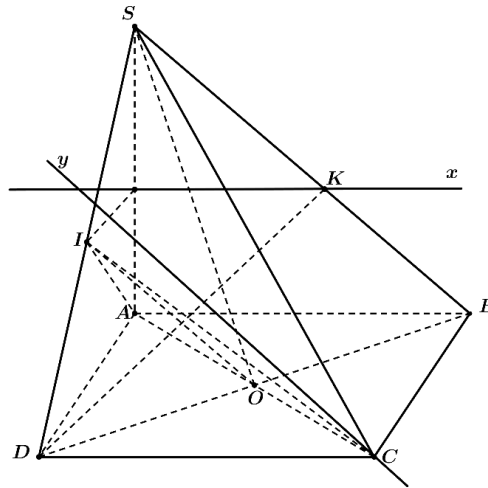
Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy

$$MN \text{ và } EF, \text{ dễ thấy } h_1 = \frac{2}{3}h_2. \text{ Vậy } \frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD)
- Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC
- Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD
- $CD // IJ$

Lời giải



a) Đúng: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD)$

$$S \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$$

b) Sai: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD; AD // BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD // CB \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ K \in (KBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kx = (KBC) \cap (SAD) \\ Kx // AD // BC \end{cases}.$$

$$\text{Trong } (SAD) \text{ gọi } J = Kx \cap SA \text{ ta có } \Rightarrow \begin{cases} J \in SA \\ J \in Kx \subset (BKC) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (BKC)$$

c) Đúng: Ta có OI là đường trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow OI // SD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OI // SD \\ OI \subset (OIA) \\ SD \subset (SCD) \\ C \in (OIA) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cy = (OIA) \cap (SCD) \\ Cy // SD // OI \end{cases}.$$

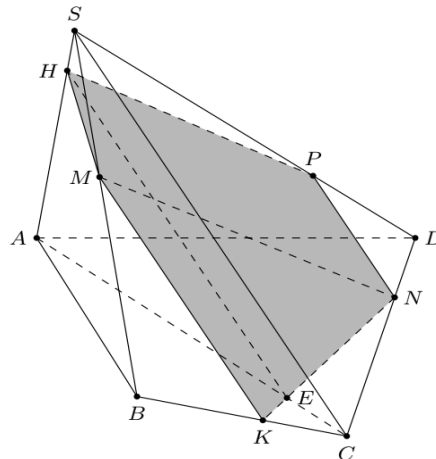
d) Đúng: Ta có: $IJ // AB$ (IJ là đường trung bình của ΔSAB)

Mặt khác: $AB // CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow CD // IJ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC . Kẻ $MK \perp SC, (K \in BC)$, $NP \perp SC, (P \in SD)$ và $EH \perp SC, (H \in SA)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD) .
- NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .
- EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC) .
- Thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

Lời giải



a) Sai: Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $MK \perp SC, (K \in BC)$ thì MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

b) Sai: Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $NP \perp SC, (P \in SD)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD) .

Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap NK \Rightarrow E \in (P)$.

c) Đúng: Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $EH \perp SC, (H \in SA)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC) .

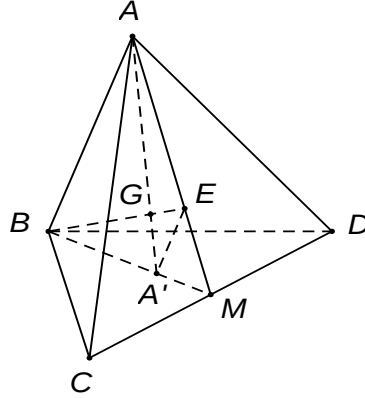
d) Đúng: Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với (P) là PM , giao tuyến của mặt phẳng (SAB) với (P) là HM .

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

Lời giải



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD , M là trung điểm của CD .

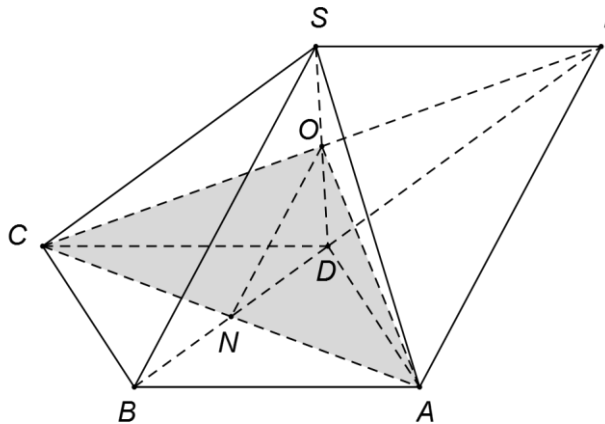
Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB , có $\frac{ME}{MA} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}$ suy ra $A'E \parallel AB \Rightarrow \frac{A'E}{AB} = \frac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lí Talet suy ra $\frac{A'E}{AB} = \frac{A'G}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 3$.

Câu 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Gọi S là diện tích thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$. Tính $\frac{S}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Gọi $O = SD \cap CI$; $N = AC \cap BD \Rightarrow O, N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON = \frac{1}{2}SB = 4$.

Thiết diện của $mp(ACI)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác $\triangle OCA$.

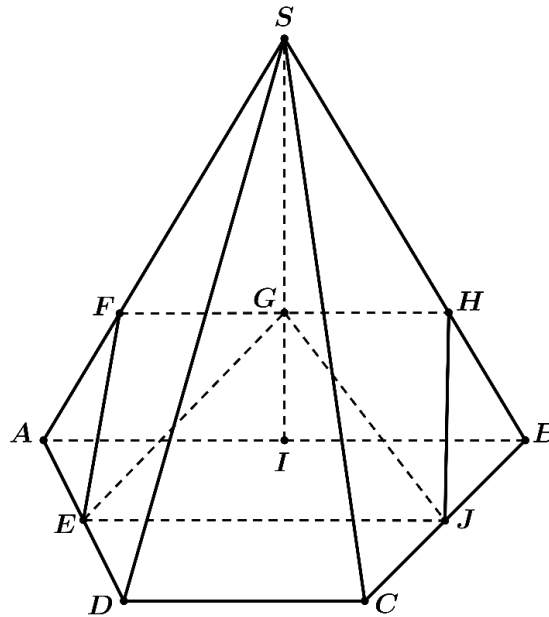
Tam giác $\triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \triangle SDC = \triangle SDA$

$\Rightarrow CO = AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 đỉnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle OCA$ cân tại O

$$\Rightarrow S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} ON \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow \frac{S}{\sqrt{2}} = 8.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Biết tứ giác tạo bởi các giao tuyến của (IJG) và các mặt hình chóp là một hình bình hành, $AB = 6$. Khi đó, tính độ dài cạnh CD .

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua G song song với AB cắt SA tại F , cắt SB tại H . Khi đó $IJHF$ là tứ giác tạo bởi các giao tuyến của (IJG) và các mặt hình chóp $\Rightarrow IJHF$ là hình bình hành.

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}.$

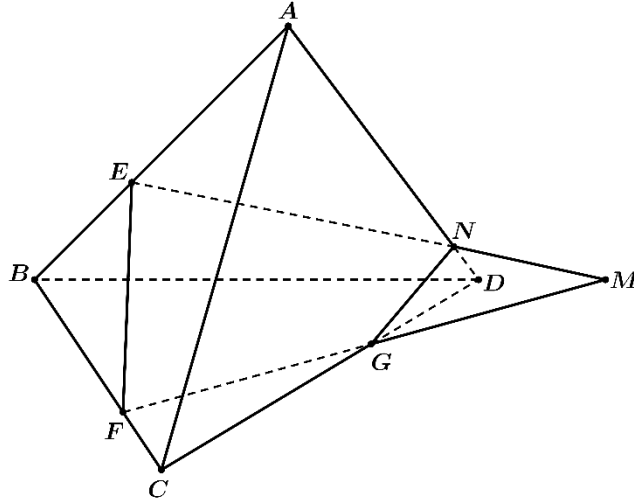
Vì I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC nên IJ là đường trung bình của hình

thang $ABCD \Rightarrow FH \parallel IJ \parallel AB \Rightarrow \frac{FH}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH = \frac{2}{3} \cdot AB = 4 \Rightarrow IJ = 4.$

Ta lại có: $IJ = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow CD = 2IJ - AB = 2.$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng 10. Gọi E là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AE = 2EB$, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$ và G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) và mặt bên ACD bằng

Lời giải



Gọi $\{M\} = FG \cap BD$ và $\{N\} = EM \cap AD$. Suy ra $NG = (EFG) \cap (ACD)$.

Theo định lí Menelaus cho tam giác BDC với 3 điểm F , G , M thẳng hàng ta có:

$$\frac{MD}{MB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{MD}{MB} \cdot 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{MB}{MD} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1 \Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot \frac{ND}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{ND}{NA} = \frac{1}{8}.$$

$$\Rightarrow 8ND = NA \Rightarrow 9ND = 10 \Rightarrow ND = \frac{10}{9}.$$

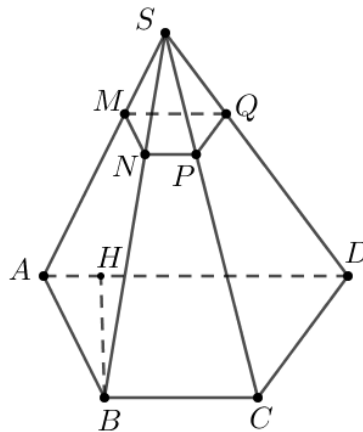
Xét tam giác đều NDG , ta có

$$NG = \sqrt{ND^2 + DG^2 - 2ND \cdot DG \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{10^2}{81} + \frac{10^2}{9} - 2 \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{7}}{9} \approx 1,47.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang và $AD \parallel BC$, $AB = 2$, $AD = 8$, $BC = 4$, $BAD = 60^\circ$. Mặt phẳng (α) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $\frac{SA}{SM} = 3$.

Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của B lên cạnh AD . Suy ra $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{(AB + BC) \cdot BH}{2} = \frac{(8 + 4) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) và các cạnh SB, SC, SD .

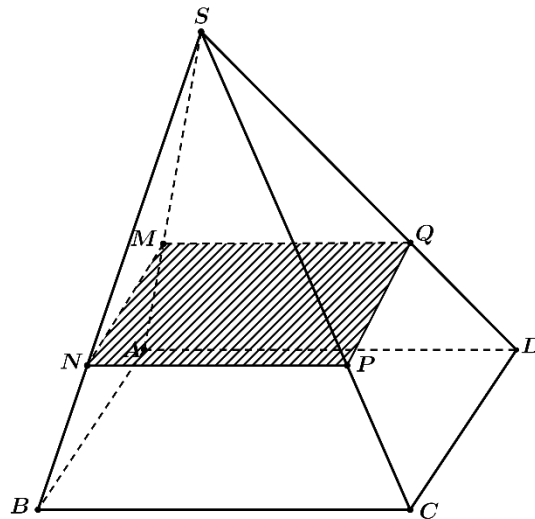
Vì $(\alpha) \parallel (ABCD)$ nên (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$ đồng dạng với hình thang $ABCD$.

Vì $(\alpha) \parallel (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3} = k$.

Đến đây, diện tích của $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{9} S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và BC , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

Lời giải



Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại N , từ N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P .

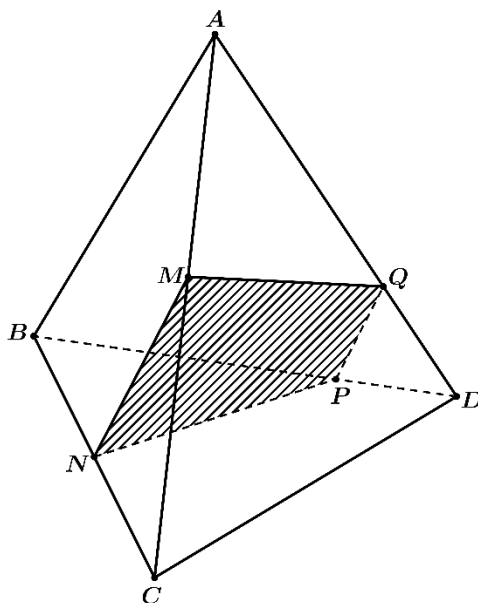
Từ P kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại Q . Khi đó mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo tứ giác $MNPQ$.

Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình vuông có cạnh $MN = \frac{2}{3} AB = \frac{20}{3}$. Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ là

$$S = \left(\frac{20}{3} \right)^2 = \frac{400}{9} \approx 44,4.$$

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CA, CB và P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$, tính diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (MNP) ?

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ \{P\} = (MNP) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (ABD) \text{ là đường thẳng qua } P, \text{ song song } AB \text{ cắt}$

$AD \text{ tại } Q \Rightarrow MNPQ \text{ là hình thang nên } \frac{DP}{DB} = \frac{1}{3} = \frac{DQ}{DA} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow DQ = 2, BP = 4, PQ = 2.$

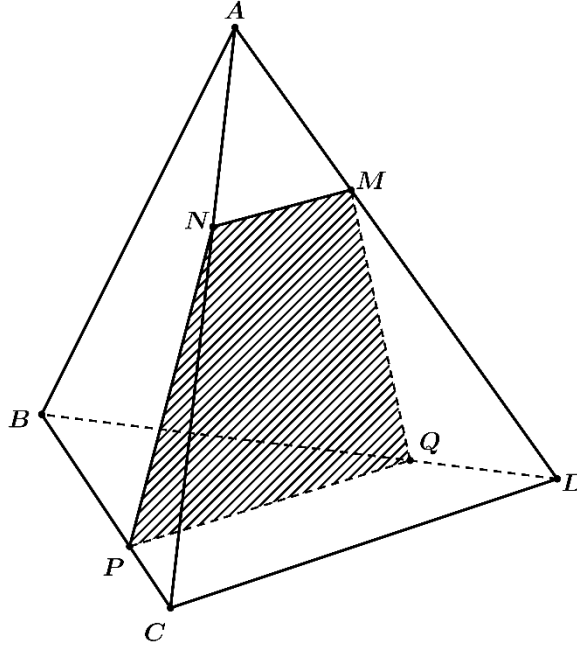
Hai tam giác $\triangle MAQ = \triangle NBP \Rightarrow NP = MQ \Rightarrow MNPQ \text{ là hình thang cân.}$

Ta có: $MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AQ \cdot AM \cdot \cos 60^\circ = 13 \Rightarrow MQ = NP = \sqrt{13}.$

Suy ra: $PH = \sqrt{NP^2 - NH^2} = \frac{\sqrt{51}}{2}.$ Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(PQ + MN)PH = \frac{5\sqrt{51}}{4} \approx 8,93.$

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua MP , song song với CD cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu khi $a = 10$?

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (BCD) \\ \{P\} = (BCD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (\alpha) \text{ là đường thẳng qua } P \text{ song song } CD \text{ và cắt } BD \text{ tại } Q.$

Ta có: $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (ACD) \\ \{M\} = (ACD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \cap (\alpha) \text{ là đường thẳng qua } M \text{ song song } CD \text{ và cắt } AC \text{ tại } N$

Vậy thiết diện của tứ diện khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Vì tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $a \Rightarrow BC = BD = AC = AD$.

Theo Talet: $\frac{PC}{BC} = \frac{QD}{BD} \Rightarrow PC = QD = x; \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM = AN = MN = x.$

Suy ra $BP = BQ = NC = MD = PQ = a - x.$

$$\triangle PCN = \triangle QDM (c - g - c) \Rightarrow MP = NQ = \sqrt{CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 - 3ax + 3x^2}.$$

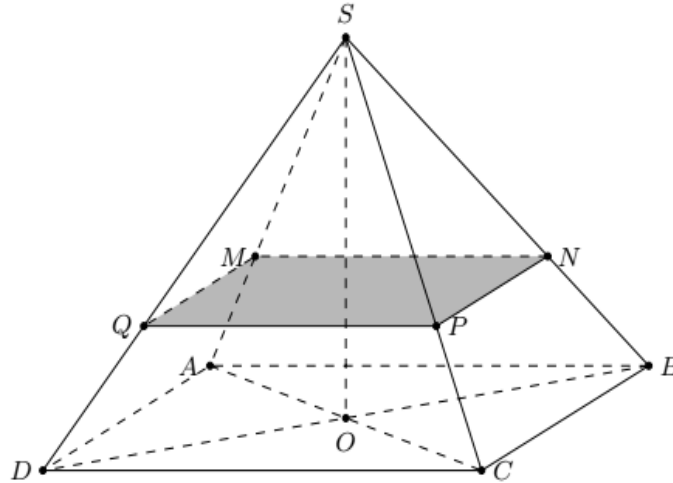
$$ME = \sqrt{8x^2 - 8ax + 3x^2}$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + QP)ME = \frac{a}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3x^2} = \frac{a}{2}\sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \geq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } \min S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50$$

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với AB và AD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích thiết diện này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Qua M kẻ $MN \parallel AB, (N \in SB)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAB) .

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD và song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Qua M kẻ $MQ \parallel AD, (Q \in SD)$ thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAD) .

Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng $BC \parallel AD$ và song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Qua N kẻ $NP \parallel BC, (P \in SC)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SDC) .

Tứ giác $MNPQ$ có $PN \parallel QM$ (vì cùng song song với BC) và $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành.

$$\text{Mặt khác } AB \perp AD \Rightarrow MN \perp MQ; \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{20}{3}.$$

$$\text{Tương tự tính được } MQ = \frac{20}{3}.$$

$$\text{Vậy } MNPQ \text{ là hình vuông có diện tích là } \frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} = \frac{400}{9} \approx 44,44.$$

-----HẾT-----